

Олимпиада ЮМШ СПбГУ Интернет-карусель 9-11 классов 17 января 2013 года

1. В последовательности $x, y, z, t, 10, u, v, \dots$ каждый член, начиная с третьего, равен произведению двух предыдущих членов. Найдите произведение первых шести членов этой последовательности.
2. На каждой из двух параллельных прямых отметили по десять точек. Сколько существует треугольников, все вершины которых лежат в отмеченных точках?
3. Михаил вычел из суммы N первых трёхзначных чисел сумму N самых больших двузначных чисел. Для какого наименьшего N разность, полученная Михаилом, является четырёхзначным числом?
4. Найдите количество натуральных чисел меньших 1000, квадраты которых оканчиваются двумя одинаковыми цифрами.
5. Вычислите (в градусах) наименьший угол треугольника, в котором медиана и высота, проведённые из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части.
6. Дробь $\frac{100!}{1250}$ сократили, и получили несократимую дробь $\frac{m}{n}$. Найдите n .
7. Город имеет форму квадрата со стороной 5 км. Улицы разделяют его на кварталы со стороной 200 м. Какую наибольшую площадь (в квадратных километрах) можно заключить внутри замкнутого маршрута длиной 10 км по улицам этого города?
8. Точки K и L делят диагональ AC прямоугольника $ABCD$ на три равных части. Найдите отношение площади прямоугольника $ABCD$ к площади четырёхугольника $KBLD$.
9. Найдите хотя бы одно трёхзначное число, равное сумме факториалов своих цифр.
10. Коля посчитал количество способов выбрать из чисел $1, 2, \dots, 100$ четыре не обязательно различных числа так, чтобы сумма выбранных им чисел делилась на 5, а Миша – количество способов выбрать из чисел $1, 2, \dots, 100$ четыре не обязательно различных числа так, чтобы произведение выбранных им чисел делилось на 5. Найдите отношение результата Миши к результату Коли. (Способы, отличающиеся лишь порядком чисел, считаются разными).
11. Сколько значений x , при которых модуль $\sin x$ равен значению дроби $2x/(2013)$
Сколько решений имеет уравнение $|\sin x| = \frac{2x}{2013\pi}$?

12. Сколько решений на отрезке $[1;10]$ имеет уравнение $2x=[5x]-[3x]$? (Здесь $[a]$ – целая часть числа a , то есть наибольшее целое число, не превосходящее a).
13. Сколько среди коэффициентов многочлена $(x+1)^{100}$ нечетных?
14. Известно, что a, b, c – целые числа, сумма которых равна 15, и уравнение $(x-a)(x-b)(x-c)-3=0$ имеет целый корень. Найдите этот корень.
15. Найдите отношение площадей вписанных в одну и ту же окружность правильных шестиугольника и треугольника.